Perguntas de exames de qualificação

Variáveis Complexas

Cursos regulares que normalmente engloba:

- Superfícies de Riemann
- Várias variáveis complexas

Perguntas:

- Fale sobre a fórmula de Riemann-Hurwitz e dê uma idéia da prova.
- Enuncie o Teorema de Riemann-Roch e dê uma aplicação.
- Seja $F : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann compactas. Prove:
  1. se $Y \cong \mathbb{P}^1$ e $\deg F \geq 2$, então F é ramificada.
  2. se $g(X) = g(Y) = 1$, então F não é ramificada.
  3. $g(Y) \leq g(X)$.
  4. se $g(Y) = g(X) \geq 2$, então F é biholomorfismo.
- Fale sobre o mergulho canônico. Que tipo de mergulho temos para superfícies de Riemann hiperelípticas?
- Prove que não existe uma aplicação holomorfa da esfera de Riemann para uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 1$.
- Considere a curva cuspidal. Calcule o gênero da sua normalização.
- Fale, enuncie, e prove o Teorema de Hartogs no polidisco.
- Dê um exemplo de variedade complexa com $H^{0,1}(X) \neq 0$.
- Aplicação imediata da sequência exponencial. Por exemplo, seja f holomorfa tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in V$. Existe g holomorfa tal que $\exp(2\pi i g) = f$? (ou então pergunta por g com propriedade semelhante)
- Seja X uma superfície de Riemann compacta. Existe uma quantidade finita de pontos $p_1, ..., p_k \in X$ tal que toda forma holomorfa ω que se anula em $p_1, ..., p_k$ é identicamente nula?
- Dê exemplo de uma variedade V com coholomogia de Cech $H^1(V, \mathbb{Z}) = 0$.
- Seja M uma variedade complexa. Dê a idéia (dizendo apenas os resultados necessários) da prova de que

$$H^q(M, \mathcal{O}^{p,0}) \cong H^{p,q}(M), q \geq 0.$$

- Prove que todo aberto $D \subset \mathbb{C}$ é um domínio de holomorfia. Um aberto $D \subset \mathbb{C}^n$ convexo é domínio de holomorfia? Sim ou não? Qual a ideia utilizada para se provar o fato da pergunta em $\mathbb{C}$ que devemos transportar para responder esta última?
- Prove que as funções holomorfas de uma variedade de Stein M separam pontos.

- Dê um exemplo de um feixe $\mathcal{F}$ sobre alguma variedade de Stein M tal que $H^1(M, \mathcal{F}) \neq 0$.
- É verdade que toda superfície compacta menos um número finito de pontos é hiperbólica?
- Prove que toda superfície de Riemann não compacta é uma variedade de Stein.
- Seja p um ponto em uma superfície de Riemann compacta M. Prove que existe uma função meromorfa em M com um único pólo em p.
- Prove que o grupo de cohomologia de Cech sobre os inteiros $H^1(M, \mathbb{Z})$ não tem torsão (suponha que M é projetiva).
- Prove que todo aberto de $\mathbb{C}$ é uma variedade de Stein.
- Enuncie e prove o Teorema de Hartogs. Por que o teorema não é válido em dimensão 1? Qual é o problema na prova para o caso de dimensão 1? (Aqui está se falando do teorema para o polidisco).
- Se S é uma superfície de Riemann compacta, prove que $\mathrm{Aut}(S)$ é finito.