

# Perguntas de exames de qualificação

## Análise

### Cursos regulares que normalmente engloba:

- Teoria Espectral
- Equações Diferenciais Parciais: Teoria linear
- Análise Harmônica

### Perguntas:

- Defina o espaço de Schwartz e o espaço das distribuições temperadas. Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \geq 1$ , podemos identificar  $f$  com alguma distribuição temperada? Todas são assim?
- Defina e diga os principais resultados sobre a transformada de Fourier em  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Essa transformada é sobrejetora em  $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ ?
- Fale sobre a transformada de Fourier em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Por que precisamos usar o espaço  $S(\mathbb{R}^n)$ ?
- Fale sobre a transformada de Fourier em geral.
- Calcule a transformada de Fourier das funções  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$ .
- A transformada de Fourier de uma função com suporte compacto também tem suporte compacto?
- Defina os espaços de Sobolev e diga sua utilidade.
- Enuncie e demonstre o lema de Sobolev.
- Demonstre o lema de Riemann-Lebesgue.
- Mostre que  $\delta \in H^s(\mathbb{R}^n)$  se  $s < -\frac{n}{2}$ .
- Qual é o dual de  $H^s(\mathbb{R}^n)$ ? Dê uma idéia da prova.
- Se uma EDP tem ordem  $m$ , em que espaço de Sobolev deve estar a solução clássica?
- Defina resolvente, espectro e autovalor. Dê um exemplo de operador que possua um elemento no espectro que não é autovalor.
- Qual é o espectro do operador shift?
- Defina operador autoadjunto, fechado e fechável.
- Enuncie o critério básico. Qual item do critério básico usaria para mostrar que um operador simétrico não é autoadjunto?
- Dê exemplo de um operador simétrico que não é autoadjunto.
- Mostre que o operador  $T : C_0^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  dado por  $T(f) = f''$  é essencialmente autoadjunto.
- O que é uma família espectral?

- Enuncie o Teorema Espectral para operadores autoadjuntos não necessariamente limitados. Qual o sentido da integral?
- Defina integral de Stieltjes e diga como usá-la para demonstrar o Teorema Espectral.
- Qual é a família espectral do operador  $H_0$  ( $D(H_0) = H^2$  e  $H_0(f) = -\Delta f$ )?
- Qual é a família espectral do operador  $T : L^2_{\text{per}}[0, 2\pi] \rightarrow L^2_{\text{per}}[0, 2\pi]$  dado por  $T(\phi) = -\partial^2 \phi$ ?
- Dê sentido ao operador  $e^{itA}$ . Qual é o gerador infinitesimal de  $A = i \frac{d}{dx}$  se  $D(A) = H^1 \subset L^2$ ?
- Calcule o grupo unitário de  $H_0$  e de  $T(f) = if'$ .
- Enuncie e dê uma aplicação do Teorema de Kato-Rellich.
- Como resolver a equação de Schrodinger com potencial?
- Que condição permite  $\text{KR1} \Rightarrow \text{KR2}$ ?
- Mostre que o operador de multiplicação  $M_f(g)(x) = f(x)g(x)$  é auto adjunto quando  $f$  é uma função real em  $L^2(\mathbb{R}^n)$  com  $D(M_f) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n); f \cdot g \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ . Qual é o espectro desse operador?
- Encontre o espectro do laplaciano no espaço das funções periódicas em  $[0, 1]$ .
- Enuncie o teorema de Stone, dê uma idéia da prova e encontre o grupo unitário associado ao operador de multiplicação do problema anterior.
- Enuncie e dê uma idéia da prova do Teorema da extensão.
- Enuncie e dê uma idéia da prova do Teorema do traço.
- Enuncie e prove a Alternativa de Fredholm.
- Mostrar que 1 está no espectro essencial do laplaciano pela definição.
- Enuncie e prove o Teorema de Lax-Milgram. Aplique-o para encontrar soluções fracas de uma EDP elíptica da forma  $L(u) = \sum_{ij} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}$  com condição de fronteira 0 num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .
- Enuncie o Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov. O que acontece com o expoente crítico?
- Prove que a desigualdade  $\|\Delta f\|_{L^2} \geq C \sum \|\partial^\alpha f\|_{L^2}$  para  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
- Para quais valores de  $p$  tem-se  $\|f\|_{L^p} \leq C \|\Delta f\|_{L^2}$ ?
- Prove a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Suponha que uma função satisfaça a igualdade para a melhor constante. O que se pode dizer sobre ela?
- Fale sobre Hille-Yosida. Quem é o gerador infinitesimal das translações em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ?
- Como resolver a equação parabólica (com coeficientes independentes de  $t$ ) usando Hille-Yosida?
- Prove o Princípio do Máximo fraco.
- Fale sobre o operador maximal e prove a limitação fraca 1-1. Enuncie e demonstre o teorema da diferenciação de Lebesgue.
- Utilize o teorema de Hille-Yoshida no contexto da equação da onda.