Perguntas de exames de qualificação

Topologia

Cursos regulares que normalmente engloba:

- Topologia Diferencial
- Topologia das Variedades

Perguntas:

- Fale sobre o grau topológico e dê aplicações.
- Fale sobre homologia singular e a sequência de Mayer-Vietoris.
- Fale sobre homologia celular.
- Fale sobre a Dualidade de Poincaré no contexto diferenciável e dê aplicações.
- Fale sobre o Teorema de Hopf sobre a determinação da classe de homotopia de aplicações entre esferas de mesma dimensão pelo grau.
- Fale sobre a classificação de superfícies.
- Fale sobre o Teorema de De Rham.
- Fale sobre a relação entre o grupo fundamental de uma variedade e seu primeiro grupo de homologia singular.
- Dê uma estrutura de anel para a cohomologia de $S^2 \times S^4$.
- O que é o índice de uma singularidade de um campo de vetores? Qual sua relação com a característica de Euler de uma variedade compacta? Dada uma variedade compacta M com bordo, expresse a característica de Euler do dobro de M em termos da característica de Euler de M.
- Se M é uma variedade compacta não orientável, então a aplicação identidade $\mathrm{id} : M \to M$ pode ser homotópica a uma aplicação constante?
- Seja M uma variedade diferenciável com $\dim M \geq 3$ e seja S uma subvariedade de M com $\operatorname{codim} S \geq 3$. Usando transversalidade, prove que o grupo fundamental de M e de $M - S$ são isomorfos.
- Enuncie a fórmula de Kunneth. Esta fórmula vale para fibrações localmente triviais?
- O anel de cohomologia singular pode distinguir espaços topológicos? Dê exemplos.
- Dê duas provas do Teorema de Brower.
- Dê restrições topológicas para uma variedade compacta M^m sem bordo ser o bordo de uma variedade compacta N^{m+1}.
- Prove que se M é uma variedade compacta, então existe um campo de vetores de classe C^∞ cujas singularidades são todas hiperbólicas e de mesmo índice e dê uma aplicação do resultado.
- É verdade que se M é variedade simplesmente conexa então existem abertos $U, V \subset M$ simplesmente conexos tais que $M = U \cup V$ e $U \cap V$ também seja simplesmente conexo?

- $\mathbb{CP}^2$ e $S^2 \times S^2$ são difeomorfos?
- Roteiro: Seja M^m uma variedade compacta e orientada e S^{m-k} uma subvariedade compacta e orientada. Explique como S determina um elemento em $(H_{dR}^{m-k}(M))^*$. Por Dualidade, temos um isomorfismo $D : (H_{dR}^{m-k}(M))^* \to H_{dR}^k(M)$. Em particular, se S é o conjunto dos zeros de uma seção $\sigma : M \to E$ transversal a seção nula de um fibrado vetorial $E \to M$ orientado de posto m, então S é um conjunto discreto de pontos com orientação. Assim, por dualidade, S corresponde à uma m-forma em M, que por sua vez, por de Rham, corresponde à um número real. Que número é esse? Este número é inteiro?
- Dê exemplo de uma superfície compacta Σ (com ou sem bordo) com $\chi(\Sigma) = -153$.
- Pode existir um recobrimento $\pi : M \to N$ com M e N compactas tais que $\chi(M) = 5$ e $\chi(N) = 7$?
- A aplicação de Hopf $\pi : S^3 \to S^2$ é homotópica à uma constante?
- Fale sobre o teorema de Sard e dê uma aplicação.
- Fale sobre o recobrimento duplo orientável. Qual é o recobrimento duplo orientável da gaffara de Klein? Pode existir uma variedade simplesmente conexa não orientável?
- Seja M uma variedade conexa compacta e sem bordo, retire um disco desta variedade e construa o "dobro"de M. Qual é a relação entre a característica de Euler desta variedade com a variedade original? Qual é a característica de Euler se a dimensão for ímpar?
- Dê exemplo de uma variedade compacta orientável que tenha algum grupo de homologia com torção.